

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING

VÝPOČET OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU ASYNCHRONNÍHO MOTORU ZA ÚČELEM MINIMALIZACE ZTRÁT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

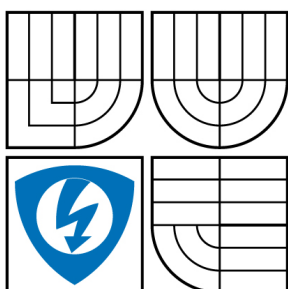
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN PRUDÍK

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A
ELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC
ENGINEERING

VÝPOČET OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU ASYNCHRONNÍHO MOTORU ZA ÚČELEM MINIMALIZACE ZTRÁT

CALCULATION OF THE OPTIMUM SLIP FREQUENCY WITH RESPECT TO THE MINIMUM
LOSSES OF AN INDUCTION MOTOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

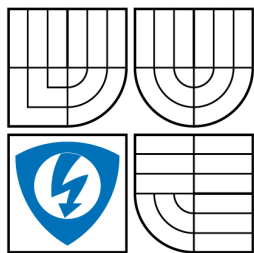
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN PRUDÍK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL VOREL, Ph.D.

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor

Silnoproudá elektrotechnika a elektroenergetika

Student: Martin Prudík

ID: 103218

Ročník: 3

Akademický rok: 2008/2009

NÁZEV TÉMATU:

**Výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru
za účelem minimalizace ztrát**

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Na základě SP a podle pokynů vedoucího sestavte přehledný dokument obsahující podrobné matematické odvození rovnic pro výpočet optimálního rotorového kmitočtu.
2. Vytvořte soubor v programu EXCEL nebo vytvořte jiný software pro řešení soustav nelineárních rovnic, které se v problematice vyskytují (iterační metodou).
3. Provedte výpočet optimálního rotorového kmitočtu v širokém rozsahu momentu a otáček pro motor dodaný vedoucím práce.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

Dle doporučení vedoucího.

Termín zadání: 1.10.2008

Termín odevzdání: 29.5.2009

Vedoucí práce: doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D.

doc. Ing. Čestmír Ondrůšek, CSc.
Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

ABSTRAKT

V díle je odvozen matematický aparát popisující výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru s kotvou nakrátko. Odvození je provedeno pomocí náhradního Γ -článku a je konstruováno pro široké rozmezí otáček a zátěžných momentů. Konstanty náhradního článku motoru, požadovaný moment a otáčky jsou vstupy optimalizace. Optimální rotorový kmitočet a velikost napájecího napětí jsou výstupy této optimalizace. Odvozený matematický aparát je prezentován výpočty na dvou asynchronních motorech pro různé otáčky a zatížení.

KLÍČOVÁ SLOVA

Asynchronní motor, trakční pohon, optimální skluzový kmitočet, vysoká účinnost.

ABSTRACT

A mathematical model describing the calculation of the optimal slip frequency of an Induction Motor with squirrel-cage is proposed in this work. The derivation is done using a replace Γ -network, and is designed for a wide range of speeds and torque. The requested torque, speed and constants of replacement network are the inputs of the optimization. Optimum slip frequency and corresponding line voltage are the outputs of this optimization. The results of the calculations are presented using two asynchronous machines for different speed and torque.

KEYWORDS

Induction motor, high efficiency, traction drives, optimum slip frequency.

PRUDÍK Martin. *Výpočet optimálního kmitočtu rotorového proudu asynchronního motoru za účelem minimalizace ztrát*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky, 2009. 45 s. Vedoucí práce byl doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru za účelem minimalizace ztrát“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. Ing. Pavlu Vorlovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne

Podpis autora

OBSAH

Úvod	10
1 Odvození výpočtu optimálního rotorového kmitočtu	12
1.1 Analýza Γ -článku asynchronního motoru	12
1.2 Rozbor ztrát	13
1.2.1 Ztráty v mědi statoru	14
1.2.2 Ztráty v mědi rotoru	14
1.2.3 Ztráty v železe statoru	14
1.3 Vliv přesycování magnetického obvodu	15
1.3.1 Lineární aproximace přesycování L_1	16
1.4 Nalezení vztahů pro jednotlivé ztráty jako funkce parametrů Γ -článku, otáček, momentu a rotorového kmitočtu	18
1.4.1 Moment a proud jako funkce Ω_r, Ω_m, U	18
1.4.2 Napětí jako funkce M, Ω_r, Ω_m	18
1.4.3 Proud jako funkce M, Ω_r, Ω_m	19
1.4.4 Ztráty v mědi statoru jako funkce M, Ω_r, Ω_m	19
1.4.5 Napětí U_1 jako funkce M, Ω_r, Ω_m	20
1.4.6 Ztráty v železe jako funkce M, Ω_r, Ω_m	21
1.5 Hledání optimálního rotorového kmitočtu	22
1.5.1 Malé otáčky	22
1.5.2 Velké otáčky	28
2 Modelování ztrát v programu Matlab	31
2.1 Simulace konkrétních motorů	31
2.1.1 Motor 1LA7063-4AB	31
2.1.2 Motor 1LA5183-2AA	34
2.2 srovnání výpočtů se simulací v MATLABu	36
3 Výpočty optimálního skluzového kmitočtu pro konkrétní motory	37
3.1 Přepočítání T-článku na Γ -článek	37
3.2 Princip použití matematického aparátu	39
3.3 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA7 070-4AB	39
3.4 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA5 183-2AA	41
4 Závěr	43
Literatura	45

SEZNAM OBRÁZKŮ

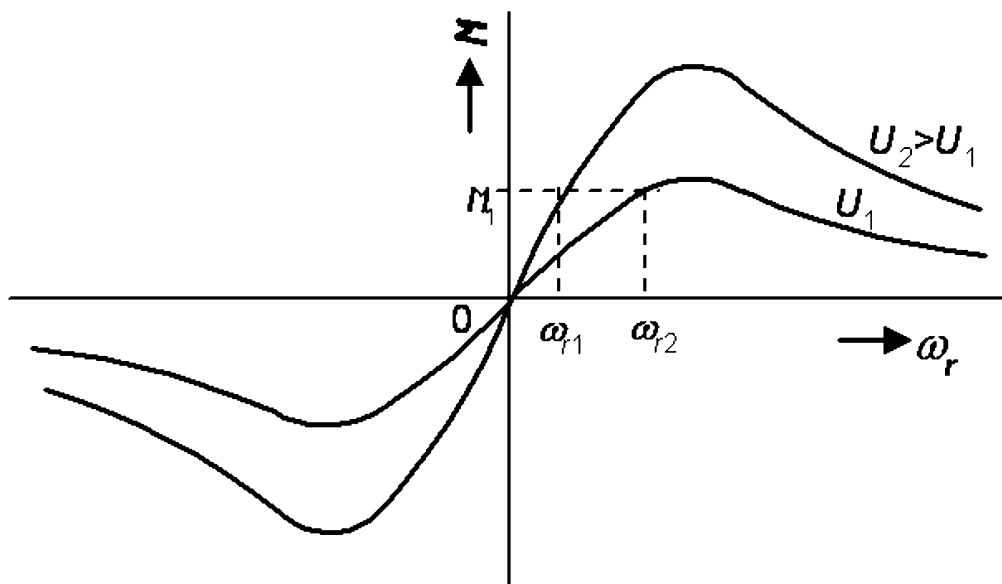
1	Momentová charakteristika asynchronního motoru	10
1.1	Náhradní schéma asynchronního motoru ve tvaru článku Γ	12
1.2	Indukčnost při přesycování motoru naprázdno	16
1.3	Indukčnost při přesycování motoru	17
2.1	Blokové schéma simulace v MATLABu	31
2.2	Závislost $\Omega_r = \Omega_r(T)$ měřených a vypočtených hodnot pro motor 1LA7063-4AB	32
2.3	Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA7063-4AB	33
2.4	Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA5183-2AA	35
3.1	K přechodu mezi náhradními schématy	37
3.2	Výpočet pro motor 1LA7 070-4AB	40
3.3	Výpočet pro motor 1LA5 183 - 2AA	42

SEZNAM TABULEK

2.1	Jmenovité hodnoty motoru 1LA7063-4AB	32
2.2	Parametry převinutého motoru 1LA7063-4AB	32
2.3	Jmenovité hodnoty motoru 1LA5183-2AA	34
2.4	Parametry motoru 1LA5183-2AA	34
3.1	Optimální Ω_r [rad/s] pro různé otáčky a moment motoru 1LA7 070 -4AB	41
3.2	Optimální Ω_r [rad/s] pro různé otáčky a moment motoru 1LA5 183- 2AA	42
4.1	Přehled výpočtu	43

ÚVOD

Jmenovitý skluzový kmitočet asynchronního stroje je volen tak aby při jmenovitých otáčkách a jmenovitém mechanickém zatížení stroje byla účinnost nejvyšší. Nicméně jestliže budeme muset měnit otáčky nebo zatížení stroje v širokém rozsahu, budou se měnit podmínky ve stroji, které mají za následek, že jmenovitý skluzový kmitočet nemusí být zrovna nejvhodnější. Tedy optimální skluzový kmitočet je proměnný. Jak bude ukázáno později, optimální velikost skluzového kmitočtu lze vypočítat a většina těchto výpočtů lze použít při vektorovém řízení daného stroje. Na obrázku 1 je zobrazena známá závislost momentu asynchronního stroje na jeho skluzovém kmitočtu. Je vidět, že požadovaný moment M_1 může být dosažen pomocí změny napájecího napětí (měnící se magnetická indukce ve statoru stroje) a k tomu odpovídající změnou skluzového kmitočtu.



Obr. 1: Momentová charakteristika asynchronního motoru

Máme tak mnoho možností jak docílit požadovaný moment. Ovšem nejlepší účinnost, která se odvíjí od minimalizace všech ztrát, bude dosažena jen při jedné optimální kombinaci napájecího napětí a skluzového kmitočtu. Tato závislost může být v krátkosti vysvětlena následujícím způsobem:

Malé mechanické otáčky

Jestliže požadujeme malý moment (menší než jmenovitý) je lepší použít sycení přibližné jmenovitému a velmi malý rotorový kmitočet. Protože statorové otáčky (synchronní) jsou malé a tak ztráty v železe statoru jsou zanedbatelné, ačkoliv sycení

ve statoru je velké. Dále díky malému skluzovému kmitočtu budou ztráty ve vinutí rotoru také minimalizovány.

Při zatížení jmenovitým momentem je vhodné použít skluzový kmitočet, udávaný výrobcem motoru (udávaný na jmenovitém momentu a otáčkách), ačkoliv otáčky jsou nižší než jmenovité. Pokud bychom chtěli nechat skluzový kmitočet malý kvůli minimalizaci rotorových ztrát, pak by magnetická indukce ve statoru byla zbytečně vysoká. Protože jsou malé otáčky, tak se ztráty v železe nejeví tak důležité, ale jsou důležité ztráty ve vinutí statoru, které jsou velmi velké, kvůli velkým magnetizačním proudům v přesyceném magnetickém obvodu.

Problém se ztrátami ve vinutí statoru, kvůli magnetizačním proudům, se stává obzvláště důležitý při mechanickém přetěžování stroje. V tomto případě není dobré přesycovat stroj tak moc (neúměrné ztráty ve vinutí statoru od magnetizačního proudu) a je lepší zvýšit rotorový kmitočet za účelem zvýšení momentu.

Velké mechanické otáčky

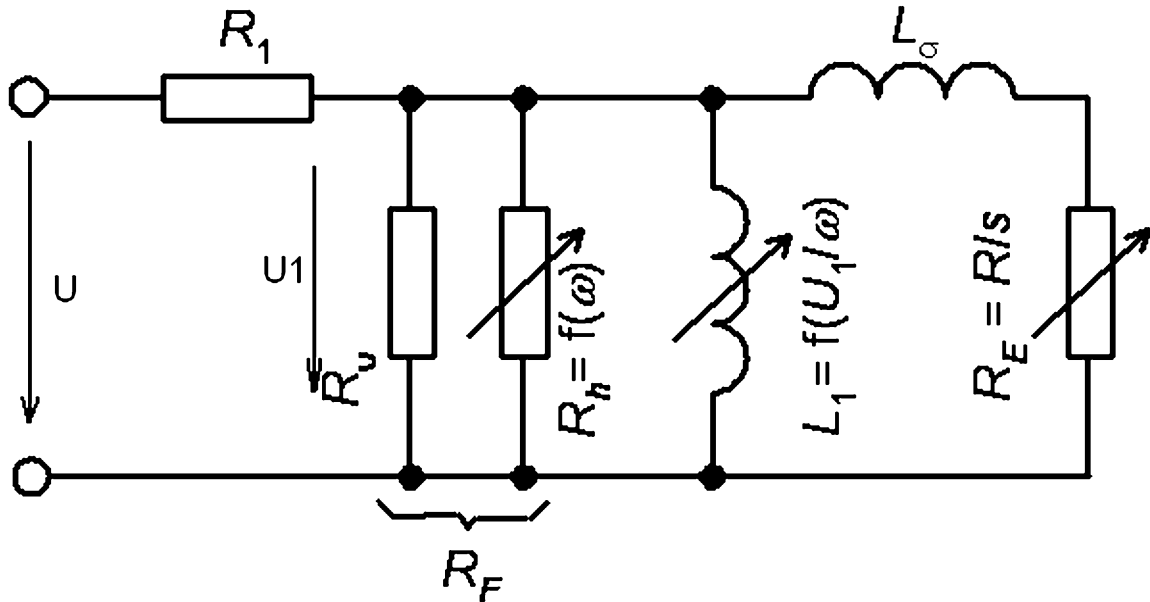
Při malém momentu není moc vhodné použít vyšší sycení a menší rotorový kmitočet, protože dominantní ztráty v železe tím jsou negativně ovlivněny. Při velkém momentu se tento problém projeví ještě více.

Výše uvedený problém bude matematicky popsán v tomto článku. Princip řešení spočívá v analytickém vyjádření všech významných ztrát stroje v závislosti na momentu, otáčkách a rotorovém kmitočtu. Moment a otáčky jsou vstupní požadované parametry a optimální rotorový kmitočet je výstup matematického aparátu. Bude tedy hledán vztah pro lokální minimum součtu všech ztrát. Skutečný asynchronní stroj si musíme nahradit nějakým modelem. Musíme proto zvolit náhradní schéma, pomocí kterého se dají jednoznačně popsat všechny ztráty. Z hlediska řešitelnosti je pro tyto účely nejvhodnější schéma ve tvaru Γ -článku, i když výrobci udávají katalogové hodnoty pro T -článek (odůvodnění v [3], str. 155). Dále bych rád podotknul, že veškeré teoretické odvození vypracoval doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D a je popsáno v [1] a [2].

1 ODVOZENÍ VÝPOČTU OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU

1.1 Analýza Γ -článku asynchronního motoru

Výrobci asynchronních motorů obvykle udávají hodnoty pro model zakládající se na T-článku. Náš matematický aparát se zakládá na Γ -článku (viz. obr. 1.1). Hodnoty v našem náhradním schématu dostaneme buď pomocí přepočtu nebo měřením.



Obr. 1.1: Náhradní schéma asynchronního motoru ve tvaru článku Γ

Kde:

- R_1 odpor primárního vinutí
- L_1 hlavní magnetizační indukčnost
- R_v odpor reprezentující ztráty vířivými proudy
- R_h odpor reprezentující hysterézní ztráty
- L_σ rozptylová indukčnost vinutí
- R_E odpor nahrazující mechanickou zátěž

Pro tento článek napíšeme základní rovnice. Vycházíme přitom z [3], kde jsou odvozeny základní potřebné vztahy pro Γ -článek uvažovaného stroje:

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{\left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + \left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) R \omega \right]^2 + \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \omega L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2} \quad (1.1)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[\frac{\omega}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{\omega L_\sigma}{R_F R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2}{\left[\left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \omega + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{R_1}{R} \Omega_r \right]^2 + \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \frac{\omega L_\sigma}{R} \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.2)$$

$$U_1 = U \frac{\omega L_1 R_F \sqrt{R_E^2 + (\omega L_\sigma)^2}}{\sqrt{\left(R_1 R_E R_F - \omega^2 L_1 L_\sigma (R_1 + R_F) \right)^2 + \left(\omega (L_1 + L_\sigma) R_1 R_F + \omega L_1 R_E (R_1 + R_F) \right)^2}} \quad (1.3)$$

Kde:

- I je efektivní fázový proud tekoucí statorovým vinutím
- U_1 je efektivní hodnota napětí na indukčnosti L_1

Pro skus s platí:

$$s = 1 - \frac{p \Omega_m}{\omega} = 1 - \frac{p \Omega_m}{p \Omega_m + \Omega_r} \quad (1.4)$$

Tedy:

$$\omega = p \Omega_m + \Omega_r \quad (1.5)$$

Pro odpor reprezentující mechanickou zátěž platí:

$$R_E = \frac{R}{s} = R \frac{p \Omega_m + \Omega_r}{\Omega_r} \quad (1.6)$$

Kde:

- p počet pólpárů
- Ω_r skluzový kmitočet [rad/s]
- Ω_m otáčky na hřídeli [rad/s]
- ω synchronní otáčky [rad/s]

1.2 Rozbor ztrát

Pro nalezení minima ztrát je nutné znát závislosti jednotlivých ztrát na známých veličinách. Proto nejprve uděláme základní rozbor ztrát v asynchronním motoru.

1.2.1 Ztráty v mědi statoru

Ve statoru jsou Joulovy ztráty způsobeny procházejícím proudem.

$$P_{Cu} = 3RI^2 \quad (1.7)$$

1.2.2 Ztráty v mědi rotoru

Ve vinutí rotoru jsou Joulovy ztráty závislé na kmitočtu rotorového proudu, a na zatížení podle vztahu:

$$P_{rot} = M \frac{\Omega_r}{p} \quad (1.8)$$

1.2.3 Ztráty v železe statoru

V Γ -článku jsou celkové ztráty v železe reprezentovány paralelní kombinací R_h a R_v . Každý z odporů tak reprezentuje jeden princip vzniku ztrát.

Hysterézní ztráty

Jsou to ztráty provázející působení střídavého magnetizačního napětí U_1 na plechy magnetického obvodu. Jsou vlastně úměrné obsahu hysterézní smyčky a protože plocha smyčky je úměrná kvadrátu magnetické indukce¹, můžeme psát $P_h \approx B^2\omega$. Pro zachování konstantního sycení platí vztah² $B \approx \frac{U_1}{\omega}$. Můžeme tedy psát:

$$P_h \approx \frac{U_1^2}{\omega} \quad (1.9)$$

Je však nutné ztráty vyjádřit pomocí parametru R_h z náhradního schématu.

$$P_h = \frac{U_1^2}{R_h} \approx \frac{U_1^2}{\omega} \quad (1.10)$$

Z toho je jasné, že poměr R_h a ω je konstantní. Velikost odporu se tedy bude měnit přímo úměrně kmitočtu napájení. Danou závislost jde zapsat následně pomocí známých nominálních hodnot R_{h0} a ω_0 .

$$R_h = \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega \quad (1.11)$$

¹Při přesycování to není pravda, to ovšem ignorujeme. Protože sycení není v každém místě stejné. To znamená, že plocha smyčky by byla zhruba konstantní. Takže $P_h = \frac{U_1^2}{R_h} \approx \omega$ (R_h by bylo nepřímo úměrné ω).

²Vychází se ze vztahu, že mag. tok je roven časovému integrálu z napětí.

Ztráty vířivými proudy

Vznikají vlivem průchodu proudu feromagnetikem. Jsou závislé na ω^2 a B^2 .

$$P_v \approx B^2 \omega^2 \approx \frac{U_1^2}{\omega^2} \omega^2 \approx U_1^2 \quad (1.12)$$

Tyto ztráty lze z náhradního schématu vyjádřit pomocí rovnosti:

$$P_v = 3 \frac{U_1^2}{R_v} \quad (1.13)$$

Je vidět, že „vířivý odpor“ je konstantní veličina nezávislá na kmitočtu.

Ztráty v železe rotoru zanedbáváme, neboť vlivem skluzového kmitočtu jsou poměrně malé a ventilační ztráty považujeme za mechanickou zátěž a proto je nepočítáme jako ztráty.

Fiktivní odpory R_h a R_v se při výpočtech nahrazují jejich paralelní kombinací označenou R_F :

$$R_F = \frac{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega}{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega} \quad (1.14)$$

Potom pro celkové ztráty v železe platí vztah:

$$P_{Fe} = \frac{U_1^2}{R_F} \quad (1.15)$$

1.3 Vliv přesycování magnetického obvodu

Pro malé hodnoty sycení je v náhradním schématu L_1 konstantní hodnota. Avšak v bodě kdy se magnetický obvod začíná nasycovat (zpravidla už při nižším sycení než jmenovitě) začne velikost L_1 klesat. Zmenšení L_1 má za následek zvětšení proudu³ podle rovnice $i = \frac{N\Phi}{L}$. Do výpočtu je tak potřeba zahrnout vliv skutečnosti, že velikost L_1 je závislá na poměru U_1/ω .

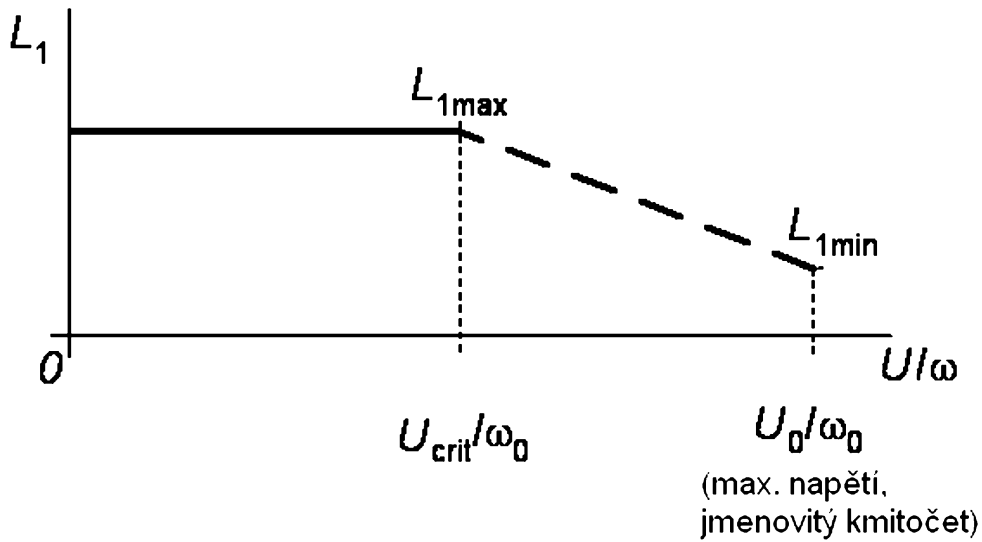
³Přesycení v mag. obvodu nastává jen v místě průchodu hlavního magnetického toku, takže nepříznivé zvětšení proudu nastane jen v tomto místě. Na celkový proud odebíraný ze zdroje nemá tento lokální výskyt podstatný vliv.

1.3.1 Lineární aproximace přesycování L_1

Pro získání potřebné závislosti $L_1 = f(U_1/\omega)$, musíme nejprve změřit závislost U na I pro motor mechanicky naprázdno. A to v rozsahu, v jakém hodláme daný stroj zatěžovat. Pro chod naprázdno lze uvažovat $\Omega_r = 0 \text{ rad}$. Rovnici (1.2) lze tedy podle tohoto předpokladu zjednodušit a vyjádřením L_1 dostaneme:

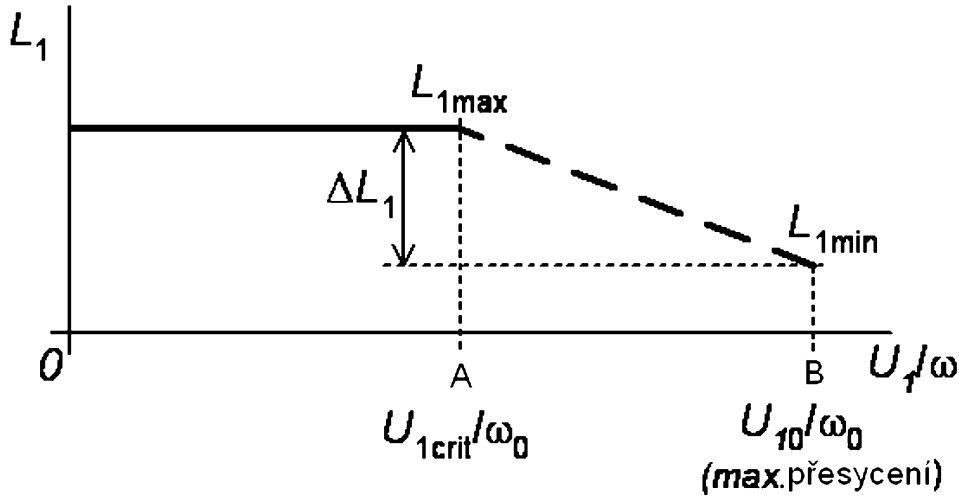
$$L_1 = \frac{U}{I\omega} \sqrt{\frac{1 - R_1^2 \left(\frac{I}{U}\right)^2}{1 - \frac{U^2}{R_F^2 I^2}}} \quad (1.16)$$

Lze spočítat L_1 pro každou naměřenou dvojici I a U . Tím obdržíme závislost $L_1 = f(U)$ za podmínky ω_0 odpovídající 50Hz. Ve vynesené závislosti na obrázku 1.2 je důležitý bod L_{1max} , je to indukčnost při nepřesyceném magnetickém obvodu. Indukčnost zůstane konstantní až do začátku přesycování U_{krit}/ω_0 . Při přesycení indukčnost lineárně klesá až do bodu maximálního přesycení U_0/ω_0 , kde je L_{1min} (viz. obr.1.2). To je ovšem platné pouze za podmínky motoru naprázdno.



Obr. 1.2: Indukčnost při přesycování motoru naprazdno

Při zatížení už na L_1 bude napětí U_1 , které je oproti U zmenšené o úbytek RI , způsobený proudem procházející statorovým vinutím. Takže musíme dostat závislost $L_1 = f(U_1)$. Tedy musíme zjistit závislost U_1 na U . To už pak bude odpovídat skutečné velikosti přesycování a linearizace bude správná při jakémkoliv zatěžovacím momentu (obr.1.3). Při chodu motoru naprázdno uvažujeme nulový skluz, takže R_E a L_σ v náhradním schématu (obr.1.1) nebude procházet proud. Dále zanedbáme ztráty v železe, přes R_F poteče menší proud než přes L_1 (R_F uvažujeme nekonečno). Za těchto podmínek lze Γ -článek považovat za napěťový $R_1 - L_1$ dělič. Ve změřené závislosti jsou důležité body U_{krit}/ω_0 a U_0/ω_0 . Stačí tedy přepočítat tyto dvě napětí a máme naši požadovanou závislost L_1 na sycení.



Obr. 1.3: Indukčnost při přesycování motoru

$$U_{1krit} = U_{krit} \frac{\omega_0 L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}^2}} \quad ; \quad U_{10} = U_0 \frac{\omega_0 L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}^2}} \quad (1.17)$$

Pro hodnoty A a B v obr.1.3 (kde A je bod nasycení a B bod maximálního přesycení) platí:

$$A = \frac{U_{1krit}}{\omega_0} = U_{krit} \frac{L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}^2}} \quad ; \quad B = \frac{U_{10}}{\omega_0} = U_0 \frac{L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}^2}} \quad (1.18)$$

V úseku A-B aproximujeme průběh L_1 lineární závislostí na U_1/ω . V této závislosti už nejsme závislí na ω_0 ale na obecném ω , takže lze aproximaci použít pro obecný kmitočet.

$$L_1 = L_{1max} - \frac{\Delta L_1}{B - A} \left(\frac{U_1}{\omega} - A \right) \quad (1.19)$$

1.4 Nalezení vztahů pro jednotlivé ztráty jako funkce parametrů Γ -článku, otáček, momentu a roto-rového kmitočtu

1.4.1 Moment a proud jako funkce Ω_r , Ω_m , U

Malé otáčky:

Vycházíme z rovnic (1.1) a (1.2) do kterých dosadíme podle vztahu (1.5). Přitom za $1 + R_1/R_F$ dosadíme jedničku, protože odpor mědi R_1 je mnohem menší než fiktivní odpor reprezentující ztráty v železe R_F .

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{\left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R (p \Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2} \quad (1.20)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[\frac{(p \Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2}{\left[(p \Omega_m + \Omega_r) + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{R_1}{R} \Omega_r \right]^2 + \left[\frac{(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R} - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.21)$$

Velké otáčky:

Vlivem velkých otáček lze zanedbat Ω_r oproti $p \Omega_m$. Dále člen $(1 + L_\sigma/L_1) R_1/R$ je blízky jedné. Tedy rovnice (1.20) a (1.21) dále zjednodušíme:

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{[R p \Omega_m]^2 + [p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R]^2} \quad (1.22)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[\frac{p \Omega_m}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{p \Omega_m L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2}{[p \Omega_m]^2 + \left[\frac{p \Omega_m L_\sigma \Omega_r}{R} - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.23)$$

1.4.2 Napětí jako funkce M , Ω_r , Ω_m

Malé otáčky:

Z rovnice (1.20) vyjádříme napětí U :

$$U = \sqrt{\frac{M \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R (p \Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 R p \Omega_r}} \quad (1.24)$$

Velké otáčky:

Z rovnice (1.22) vyjádříme napětí U :

$$U = \sqrt{\frac{M \left[[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r}} \quad (1.25)$$

1.4.3 Proud jako funkce M , Ω_r , Ω_m

Malé otáčky:

Do rovnice (1.21) dosadíme (1.24):

$$I = \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r} \left[\left[\frac{(p\Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma}{R_F R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right]} \quad (1.26)$$

Velké otáčky:

Do rovnice (1.23) dosadíme (1.25):

$$I = \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r} \left[\left[\frac{p\Omega_m}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{p\Omega_m L_\sigma}{R_F R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right]} \quad (1.27)$$

1.4.4 Ztráty v mědi statoru jako funkce M , Ω_r , Ω_m

Malé otáčky:

Do vztahu pro ztráty v mědi (1.7) dosadíme za I proud pro malé otáčky podle vztahu (1.26):

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[\left[\frac{(p\Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma}{R_F R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.28)$$

Z rovnosti je patrný vliv R_F na velikost procházejícího proudu. Při změně ztrát v železe se totiž mění proud procházející vinutím, který následně způsobuje ztráty v mědi. Nicméně R_F je tvořen paralelní kombinací prvků podle (1.14). Kde R_h je přímo závislé na statorovém kmitočtu. Při nominálním kmitočtu $f=50\text{Hz}$ jsou vířivé a hysterezní ztráty, při plném sycení, zhruba stejné ($R_v = R(h0)$). Na malých otáčkách se podle vztahu (1.11) bude R_h snižovat, tj. $R_v \gg R_h$. Takže ve vztahu pro paralelní kombinaci zanedbáme vliv R_v . Toto zjednodušení je přípustné pouze zde při výpočtu ztrát v mědi, tedy ve výpočtu vlivu ztrát v železe na změnu proudu statoru. Při výpočtu ztrát v železe už budeme uvažovat celé R_F . Podle tohoto zjednodušení

lze (1.28) modifikovat a s přihlédnutím k rovnosti (1.5) pro ω nalezneme konečný vztah pro ztráty v mědi:

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[\left[\frac{\omega_0}{R_{h0}} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{\omega_0 L_\sigma}{R_{h0} R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.29)$$

Velké otáčky:

Postup odvození je stejný jako pro malé otáčky. Proud podle vztahu (1.27), ovšem ve velkých otáčkách není možné zanedbat vliv ztrát vířivých ani hysterezních, tj. za R_F dosadíme celý vztah (1.14). Za ω opět dosadíme (1.5), přičemž díky velkým otáčkám zanedbáme Ω_r ($\Omega_r \ll p\Omega_m$). Po dosazení je konečný vztah:

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[\left[\frac{\left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0}} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[\frac{L_\sigma \left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.30)$$

1.4.5 Napětí U_1 jako funkce M , Ω_r , Ω_m

Pro získání vztahu pro ztráty v železe je potřeba vyjádřit napětí U_1 na L_1 a R_F

Malé otáčky:

Při uvažování $\omega L_\sigma = 0$ se rovnice (1.3) zjednoduší takto:

$$U_1 = U \frac{\omega L_1 R_F R_E}{\sqrt{(R_1 R_E R_F)^2 + (\omega L_1 R_1 R_F + \omega L_1 R_E (R_1 + R_F))^2}} \quad (1.31)$$

Za ω dosadíme podle (1.5) a za R_E podle (1.6). Ve vztahu (1.5) zanedbáme Ω_r a to proto, že na velmi malých otáčkách bude U tak malé, že ztráty v železe budou zanedbatelné a přesnost vztahu pro dělicí poměr není nijak důležitá. Ve větších „malých“ otáčkách již chceme přesnost rovnice pro U_1 lepší, ale zde si také smíme dovolit zanedbat Ω_r . V ostatních výpočtech si tyto zjednodušení dovoluujeme až u velkých otáček. Zde to provedeme nyní, protože ztráty v železe jsou i u větších „malých“ otáček nepříliš podstatné. Dosadíme dále za U podle (1.24), ve kterém také zanedbáme Ω_r oproti $p\Omega_m$ a to jen proto, že by nám nakonec vyšla složitá rovnice 4. řádu, její řešení je problematické, což nechceme. Nakonec tedy dostaneme vztah:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R p \Omega_m \right]^2 + \left[p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 R p \Omega_r}} \frac{p \Omega_m L_1 R_F R}{\sqrt{(R_1 R R_F)^2 + (p \Omega_m L_1 R (R_1 + R_F))^2}} \quad (1.32)$$

Velké otáčky:

Ve vztahu (1.3) pro U_1 nelze nic zanedbat. Dosadíme tedy za ω vztah (1.5) a za R_E podle (1.6). Přitom v obou dosazeních zanedbáme Ω_r oproti $p \Omega_m$, protože máme velké otáčky. Dále vlivem velkých otáček budou velké ztráty v železe, tj. $R_F \gg R_1$. Takže v (1.3) člen $(R_F + R_1)$ je přibližně roven R_F . A dosadíme-li dále za napětí podle (1.25), dostaneme konečný vztah:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[R p \Omega_m \right]^2 + \left[p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 R p \Omega_r}} \frac{p \Omega_m L_1 \sqrt{\frac{R^2}{\Omega_r^2} + L_\sigma^2}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 R}{\Omega_r} - p \Omega_m L_1 L_\sigma \right)^2 + \left((L_1 + L_\sigma) R_1 + \frac{p \Omega_m}{\Omega_r} L_1 R \right)^2}} \quad (1.33)$$

1.4.6 Ztráty v železe jako funkce M , Ω_r , Ω_m

Pro tyto ztráty platí vztah (1.15). Za R_F dosadíme podle (1.14), kde ω rozepíšeme podle vztahu (1.5). Opět zanedbáme Ω_r oproti $p \Omega_m$, a to pro malé i velké otáčky. Pro malé otáčky opět z důvodů řešitelnosti.

$$P_{Fe} = U_1^2 \frac{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{\left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)} \quad (1.34)$$

Malé otáčky:

Do vztahu (1.34) dosadíme za U_1 vztah (1.32) a dostaneme:

$$P_{Fe} = \frac{M \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R p \Omega_m \right]^2 + \left[p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 \Omega_r} \frac{p (\Omega_m L_1)^2 R \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}}{\left(R_1 R \right)^2 + (p \Omega_m L_1 R)^2 \left(\frac{R_1 \left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} + 1 \right)^2} \quad (1.35)$$

Velké otáčky:

Postup je stejný jako u malých otáček pouze za U_1 dosadíme (1.33) a dostaneme:

$$P_{Fe} = \frac{M \left[[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r} \cdot \frac{p\Omega_m L_1 \sqrt{\frac{R^2}{\Omega_r^2} + L_\sigma^2}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 R}{\Omega_r} - p\Omega_m L_1 L_\sigma \right)^2 + \left((L_1 + L_\sigma) R_1 + \frac{p\Omega_m}{\Omega_r} L_1 R \right)^2}} \cdot \frac{\left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} \quad (1.36)$$

1.5 Hledání optimálního rotorového kmitočtu

Je jasné, že nejlepší účinnost stroje při daných otáčkách, bude při minimálním součtu všech ztrát stroje. Jelikož hledáme nastavení optimálního Ω_r tak nejsnadnější způsob, jak se dopracovat k výsledku bude zderivovat ztráty podle skluzového kmitočtu a jejich součet položit roven nule, jak ukazuje následující vztah:

$$\frac{dP_{celk.}}{d\Omega_r} = \frac{dP_{Cu}}{d\Omega_r} + \frac{dP_{Fe}}{d\Omega_r} + \frac{dP_{rot}}{d\Omega_r} = 0 \quad (1.37)$$

1.5.1 Malé otáčky

Pro malé otáčky byly odvozeny vztahy pro jednotlivé ztráty. Dosadíme-li tedy do (1.37) vztahy jednotlivých ztrát (1.29), (1.35) a (1.8) dostaneme následným řešením pro neznámou Ω_r konečný obecný vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{\frac{1}{3} p R \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} (\Omega_m^4 L_1^2 p^2 + \Omega_m^2 R_1^2)}{R_1 + (p\Omega_m L_1)^2 \left(\frac{R_1 \left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} + 1 \right)^2}}{\frac{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{p(\Omega_m L_1)^2 \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 R_1^2 + \frac{1}{3} p^2 \Omega_m^2 L_\sigma^2 \right)}{R_1^2 R + (p\Omega_m L_1)^2 R \left(\frac{R_1 \left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} + 1 \right)^2} + \frac{1}{p}}} \quad (1.38)$$

Ve vztahu se vykrátí moment (všechny ztráty jsou mu totiž přímo úměrné). Takže optimální skluzový kmitočet nezávisí přímo na momentu. Nicméně L_1 ano, musíme tedy uvažovat závislost L_1 na U_1 (při přesycení).

Dále odvozená rovnice nemá příjemný tvar (nechtěl bych jí potkat v noci na liduprázdné ulici), proto rozdělíme malé otáčky do 4 následujících rozsahů:

1. Extrémně malé otáčky ($p\Omega_m \ll \Omega_r$), malý moment ($M < M_1$)
2. Extrémně malé otáčky ($p\Omega_m \ll \Omega_r$), velký moment ($M > M_1$)
3. Větší malé otáčky ($\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$), malý moment ($M < M_1$)
4. Větší malé otáčky ($\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$), velký moment ($M > M_1$)

Kde M_1 je hraniční hodnota momentu. Její velikost odvodíme a graficky koresponduje s bodem A v obr.1.3.

Extrémně malé otáčky ($p\Omega_m \ll \Omega_r$) a malý moment ($M < M_1$)

Pro tyto otáčky jdoucí k nule, jde druhý sčítanec v čitateli a prostřední sčítanec ve jmenovateli (1.38) k nule. Takže výraz se zjednoduší:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right)}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.39)$$

Při takto malých otáčkách a malém momentu (také bude malé napětí a sycení) lze zcela zanedbat ztráty v železe ($R_{h0} \Rightarrow \infty$). Při menším momentu než je M_1 , což je hraniční hodnota do které je L_1 konstantní, platí $L_1 = L_{1max}$. Můžeme tak rovnici (1.39) přeformulovat na konečný vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \frac{1}{L_{1max}^2}}{\frac{R_1}{R} \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{1}{p}}} \quad (1.40)$$

Vztah (1.40) bude platný od nulového momentu po hraniční moment M_1 při němž sycení dosáhne hodnoty A (obr.1.3). Pro malé otáčky $p\Omega_m < 20\Omega_r$ musíme použít původní vztah (1.31) pro napětí U_1 , ve kterém za ω dosadíme podle (1.5), za R_E podle (1.6) a za U podle (1.24). Přitom z důvodu malých otáček můžeme zanedbat vliv ztrát v železe, tj. $R_F \Rightarrow \infty$. Dostaneme tedy:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2}{3Rp\Omega_r}} \quad (1.41)$$

$$\frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R}{\sqrt{(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2}}$$

Nyní U_1 dle (1.41) podělíme ω uvažovanou podle (1.5). Tak se dostaneme k funkci $U_1/\omega = f(M)$, která v sobě skrývá závislost sycení na momentu. Vzniklý vztah pro U_1/ω položíme roven známému bodu nasycení magnetického obvodu stroje A (obr.1.3).

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}}\right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2}{3Rp\Omega_r}} \cdot \frac{L_{1max} R}{\sqrt{(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2}} = A \quad (1.42)$$

Odtud zbývá už jen vyjádřit hraniční hodnotu momentu M_1 :

$$M_1 = \frac{A^2}{L_{1max}^2 R} \cdot \frac{3Rp\Omega_r \left[(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2 \right]}{\left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}}\right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p\Omega_m + \Omega_r) \Omega_r L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_{1max}} \right]^2} \quad (1.43)$$

Přitom Ω_r uvažujeme podle (1.40)!

Extrémně malé otáčky ($p\Omega_m \ll \Omega_r$) a velký moment ($M > M_1$)

Jedná se opět o extrémně malé otáčky a proto zůstává v platnosti konečný vztah pro optimální rotorový kmitočet (1.40). Ovšem nyní se pohybujeme v oblasti přesyceného magnetického obvodu. L_1 není konstanta. Musíme proto do vztahu (1.40) zapracovat závislost L_1 na sycení.

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \frac{1}{L_1^2}}{\frac{R_1}{R} \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right)^2 + \frac{1}{p}}} \quad (1.44)$$

Kdybychom při větších momentech než M_1 předpokládali konstantní L_1 , byl by výpočet Ω_r chybný. Protože při předpokladu vyšší L_1 by bylo vyšší i vypočtené napájecí napětí, které na skutečné proměnné L_1 protlačí větší magnetizační proud, který má za následek větší ztráty ve vinutí statoru i v železe.

Použijeme rovnici (1.42) pro U_1/ω , přitom musíme uvažovat obecnou indukčnost L_1 . Otáčky motoru Ω_m budeme pro jednoduchost uvažovat nulové a jelikož má být výraz obecný, nebudeme výraz pokládat hodnotě A . Tak po úpravách dostaneme:

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[\Omega_r^2 \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 + R \right]^2 + \left[\Omega_r^2 L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_1} \right]^2}{3Rp\Omega_r \left[R_1^2 + \Omega_r^2 L_1^2 \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)^2 \right]}} L_1 \quad (1.45)$$

Nyní si poměr U_1/ω vyjádříme pomocí lineární aproximace (1.19):

$$\frac{U_1}{\omega} = Q - SL_1 \quad (1.46)$$

Kde Q a S jsou substituce:

$$Q = A + L_{1max} \frac{B - A}{\Delta L_1} \quad (1.47)$$

$$S = \frac{B - A}{\Delta L_1} \quad (1.48)$$

Je vidět, že vztah (1.45) se musí rovnat vztahu (1.46):

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{M \left[\Omega_r^2 \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) R_1 + R \right]^2 + \left[\Omega_r^2 L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_1} \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r \left[R_1^2 + \Omega_r^2 L_1^2 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right)^2 \right]}} L_1 \quad (1.49)$$

Dostali jsme tak soustavu dvou rovnic (1.44, 1.67) o dvou neznámých, optimální Ω_r a L_1 . Aby se rovnice daly řešit provedeme základní zjednodušení a to, že člen $(1 + L_\sigma/L_1)$ je konstanta 1,2. Nicméně i při tomto zjednodušení by vyšla kubická rovnice, proto provedeme nějaké další zjednodušení⁴ a výsledkem bude kvadratická rovnice pro optimální skluzový kmitočet, která má následující řešení:

$$\begin{aligned} \Omega_r = & \frac{\beta + M \frac{R_1^2 R^2}{K^2} + 2\alpha \frac{SQ}{K}}{2 \left(\left(\frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right)} \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{\left(\beta + M \frac{R_1^2 R^2}{K^2} + 2\alpha \frac{SQ}{K} \right)^2 - 4 \left(\left(\frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right) S^2 \alpha}}{2 \left(\left(\frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ve vztahu (1.50) jsme užili následující substituce:

$$K = \sqrt{\frac{R_1 R}{1, 4 \frac{R_1}{R} + \frac{1}{p}}} \quad (1.51)$$

$$\alpha = 3Rp \left[R_1^2 + K^2 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right)^2 \right] \quad (1.52)$$

$$\beta = M (1, 2R_1 + R)^2 \quad (1.53)$$

⁴Porovnáváním jednotlivých členů rovnice (1.67) pro skutečný motor.

Obě řešení dávají kladný výsledek. Nejedná se tedy o motorický nebo generátorický režim, ale o dvojznačnost výsledku způsobenou neekvivalentními úpravami rovnic s odmocninami. Konkrétní výpočty s praktickými čísly ukazují, že **správně je pouze řešení s kladným znaménkem**.

Dále lze stanovit vztah pro maximální možný moment, kterým lze při extrémně malých otáčkách zatěžovat motor, aby sycení dosáhlo maximálního přesycení, tj. hodnotu B na obr.1.3. Výraz bude odpovídat vztahu (1.43) jen namísto A dosadíme B a namísto L_{1max} zase L_{1min} :

$$M_{max} = \frac{B^2}{L_{1max}^2 R} \frac{3Rp\Omega_r \left[(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1min} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1min} R)^2 \right]}{\left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1min}} \right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p\Omega_m + \Omega_r) \Omega_r L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_{1min}} \right]^2} \quad (1.54)$$

Větší malé otáčky ($\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$) a malý moment ($M < M_1$)

Otáčky motoru jsou sice malé ale ne tolik, že bychom si mohli dovést zanedbat ztráty v železe statoru nebo vlastní otáčky motoru oproti Ω_r , jak jsme to udělali u extrémně malých otáček. Optimální skluzový kmitočet budeme počítat pomocí základního vztahu (1.38). Díky malému momentu se mag. obvod nepřesytí (nacházíme se před bodem A (obr.1.3) a platí, že $L_1 = L_{1max}$).

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{\frac{1}{3} p R G (\Omega_m^4 L_{1max}^2 p^2 + \Omega_m^2 R_1^2)}{R_1^2 + (p\Omega_m L_{1max})^2 (R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{p (\Omega_m L_{1max})^2 G \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 R_1^2 + \frac{1}{3} p^2 \Omega_m^2 L_\sigma^2 \right)}{R_1^2 R + (p\Omega_m L_{1max})^2 R (R_1 G + 1)^2} + \frac{1}{p}}} \quad (1.55)$$

Kde jsme pro zjednodušení užili substituci:

$$G = \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} \quad (1.56)$$

Vztah (1.55) lze za cenu drobné nepřesnosti zjednodušit⁵ do méně komplikované podoby:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{\Omega_m^2 R G}{3(R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.57)$$

⁵Zjednodušení se zakládá na vyčíslování jednotlivých sčítanců pro skutečné motory a porovnávání jejich velikosti mezi sebou.

Hraniční moment M_1 je počítán opět pomocí vzorce (1.43), protože odvození hraničního momentu bylo provedeno pro obecně malé otáčky bez zanedbání $p\Omega_m$ nebo Ω_r . S tím, že za Ω_r dosazujeme podle (1.57).

Větší malé otáčky ($\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$) a velký moment ($M > M_1$)

Pro optimální Ω_r bude opět platit vztah (1.57), ale protože se pohybujeme ve velkých momentech, které způsobují přesycování stroje, musíme uvažovat proměnnou magnetizační indukčnost L_1 .

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{\Omega_m^2 R G}{3(R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.58)$$

Opět musíme do tohoto vztahu zapracovat závislost L_1 na sycení. Vycházíme opět z rovnice (1.41), která platí pro obecně malé otáčky. Opět podělíme (1.41) ω uvažovanou dle (1.5). Dostaneme tak funkční závislost sycení na momentu. Dále platí aproximační rovnice (1.46). Porovnáním těchto dvou rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} Q - SL_1 &= \\ &= \sqrt{\frac{M \left[\left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) R_1 \Omega_r + R(p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r \left[(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_1 R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_1 R)^2 \right]}} L_1 R \end{aligned} \quad (1.59)$$

V tomto vztahu nahradíme výraz $(1 + L_\sigma/L_1)$ konstantou 1, 2 a provedeme některé další zanedbání⁶. Dostaneme tak více přehledný vztah:

$$L_1^2 = \left(Q - \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r}} \frac{1, 2R_1\Omega_r + R(p\Omega_m + \Omega_r)}{\Omega_r R_1 + R(p\Omega_m + \Omega_r)} \right)^2 \frac{1}{S^2} \quad (1.60)$$

Rovnice (1.58) a (1.60) tvoří systém dvou rovnic o dvou neznámých Ω_r a L_1 . Řešením těchto rovnic bychom dospěli k řešení rovnice 4. řádu. Proto je vhodnější požit některou z iteračních metod.

⁶Zjednodušení se zakládá na vyčíslování jednotlivých součtů pro zkutečný motor a porovnávání jich mezi sebou.

1.5.2 Velké otáčky

Do vztahu (1.37) dosadíme vztahy pro odpovídající ztráty (1.30), (1.36) a (1.8). Po derivaci takto získané obludné rovnice a následném zjednodušení⁷, dostaneme následující vztah pro optimální skluzový kmitočet na velkých otáčkách ($p\Omega_m > 20\Omega_r$):

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\varphi^2 + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{R}{3p^2 \Omega_m} \varphi \left(p^2 \Omega_m^2 + \frac{R_1^2}{L_1^2} \right)}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.61)$$

Substituci φ jsme použili jen pro přehlednost, a platí pro ní:

$$\varphi = \frac{\left(R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0}} \quad (1.62)$$

Pro (1.61) platí stejně jako tomu bylo u (1.38), že rovnice je nezávislá na zatěžovacím momentu, nicméně hlavní magnetizační indukčnost L_1 ano. Proto opět musíme do vztahu (1.61) zahrnout vliv L_1 na sycení, tj. na momentu. Proto rozdělíme řešení optimálního Ω_r na dvě skupiny:

1. Velké otáčky ($p\Omega_m > 20\Omega_r$), malý moment ($M < M_2$)
2. Velké otáčky ($p\Omega_m > 20\Omega_r$), velký moment ($M > M_2$)

Kde M_2 je hodnota hraničního momentu pro velké otáčky, opět korespondující s bodem A v obr.1.3.

Velké otáčky ($p\Omega_m > 20\Omega_r$), malý moment ($M < M_2$)

Nacházíme se v oblasti nepřesyceného mag. obvodu, proto místo L_1 uvažujeme L_{1max} . Dále ve velkých otáčkách lze zanedbat člen R_1^2/L_1^2 . Můžeme tak podle rovnice (1.61) psát vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\varphi^2 + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{R}{3} \varphi \Omega_m}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.63)$$

Vztah (1.63) bude platný od nulového momentu po hraniční moment M_2 , při němž sycení dosáhne hodnoty A . Odvození hraničního momentu M_2 vychází z prvního

⁷Opět se zakládají na vyčíslování jednotlivých sčítanců a porovnávání mezi sebou.

zlomku vztahu (1.36), který reprezentuje kvadrát napětí U_1 na L_1 . Tento vztah rozdělíme ω aby jsme dostali závislost na sycení a tu položíme rovno známé hodnotě sycení A . Můžeme tedy psát:

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} = A \quad (1.64)$$

Nyní už jen vyjádříme hraniční moment M_2 :

$$M_2 = \frac{3Rp^3\Omega_r\Omega_m^2 A^2}{[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2} \quad (1.65)$$

Velké otáčky ($p\Omega_m > 20\Omega_r$), velký moment ($M > M_2$)

Opět bude platit rovnice (1.63) ale namísto L_{1max} musíme uvažovat proměnné L_1 :

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left(\varphi^2 + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{R}{3} \varphi \Omega_m}{\frac{R_1}{R} \left[\left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.66)$$

Větší moment než M_2 , způsobí přesycení a velikost L_1 se mění podle aproximační rovnice (1.46):

$$\frac{U_1}{\omega} = Q - SL_1 \quad (1.67)$$

Za sycení dosadíme podle (1.64) a dostaneme:

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{M \left[[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} \quad (1.68)$$

Tento vztah lze, při dosazení praktických čísel a porovnání, zjednodušit na:

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{T R}{3} \frac{1}{p \Omega_r}} \quad (1.69)$$

Rovnice (1.66) a (1.69) vytváří systém dvou rovnic o dvou neznámých, optimální Ω_r a L_1 . Pro řešitelnost soustavy by jsme museli zavést další zjednodušení, které by vedly k velké chybě výpočtu. Proto je vhodné danou soustavu řešit pomocí některé z iteračních metod.

Už zbývá pouze stanovit maximální možný zatěžovací moment při velkých otáčkách. Vycházíme z rovnice pro sycení (1.64), kterou ovšem nepoložíme rovnu bodu nasycení A ale bodu maximálního přesycení B . Namísto L_{1max} použijeme L_{1min} (viz. obr.1.3).

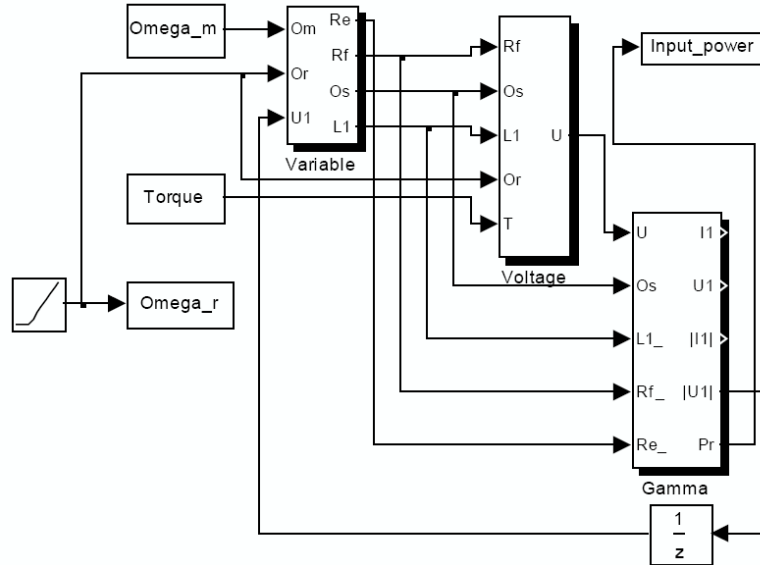
$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M_{max} \left[[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1min}} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} = B \quad (1.70)$$

Odtud už jen vyjádříme maximální moment M_{max} :

$$M_{max} = \frac{3Rp^3\Omega_r\Omega_m^2 B^2}{[Rp\Omega_m]^2 + \left[p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1min}} R \right]^2} \quad (1.71)$$

2 MODELOVÁNÍ ZTRÁT V PROGRAMU MATLAB

Tato kapitola je věnována přesnosti odvozených vztahů. Asynchronní motor (respektive náhradní Γ -článek) byl namodelován pomocí programu Matlab Simulink. Model byl sestaven tak, že jeho výstupem je závislost příkonu motoru na jeho rotorovém kmitočtu Ω_r a je znázorněna na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Blokové schéma simulace v MATLABu

Rád bych podotkl, že tato simulace nebyla v náplně práce a uvádím jí zde jen pro představu jak jsou či nejsou přesné rovnice této optimalizace.

V uvedeném schématu blok "Variable" přepočítává proměnné parametry motoru jako jsou odpory R_1 , R_f a indukčnost L_1 v závislosti na sycení. Blok "Voltage" ze vstupních hodnot podle vzorce (1.1) počítá potřebnou efektivní hodnotu napětí U . Úkolem posledního složeného bloku "Gamma" je ze vstupních hodnot Γ -článku vypočítat velikost příkonu motoru (Input_power) a také velikost indukovaného napětí U_1 , které je přivedeno zpět na blok "Variable" (vytvoříme tak algebraickou smyčku). Z obrázku je dále zřejmé, že model je vytvořen tak aby byly zadávány pouze nastavované parametry momentu (Torque) a otáček stroje v rad/s (Ω_m). Rotorový kmitočet Ω_r je nadefinován jako proměnná s daným rozsahem a jak už jsme uvedli výše, výstupem bude příkon motoru.

2.1 Simulace konkrétních motorů

2.1.1 Motor 1LA7063-4AB

Tento motor byl použit jako pohon elektrického kola [2] a jeho základní katalogové hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce 2.1.

Počet pólových dvojic	2
Jmenovitý moment	1,3Nm
Jmenovité otáčky(při 50Hz)	1350min ⁻¹
Jmenovitý výkon	180W
Účinnost při jmen. výkonu	60%

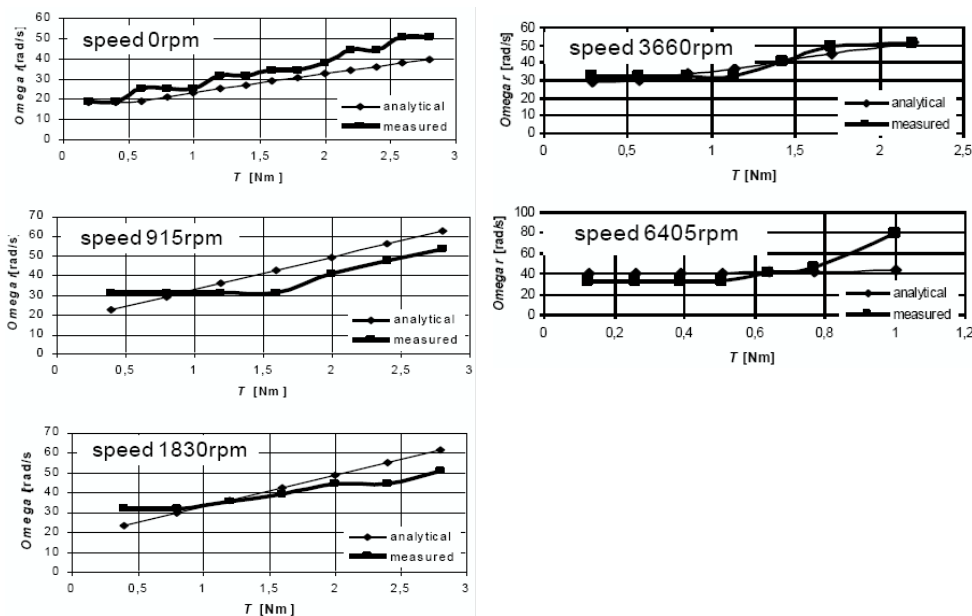
Tab. 2.1: Jmenovité hodnoty motoru 1LA7063-4AB

Motor byl, kvůli jeho použití, převinut pro nízké napětí. U převinutého motoru byl dosažený výkon 500W při nových jmenovitých otáčkách 4050ot/min, jeho konečné hodnoty Γ -článku jsou seřazeny v tabulce 2.2.

$R_1 = 43m\Omega$	$L_{1max} = 1,7mH$
$R = 40m\Omega$	$L_{1min} = 0,4mH$
$R_v = 3\Omega$	$A = 0,0143Vs/rad$
$R_{h0} = 3\Omega$	$B = 0,0257Vs/rad$
$\omega_0 = 314rad/s$	$L_\sigma = 150\mu H$

Tab. 2.2: Parametry převinutého motoru 1LA7063-4AB

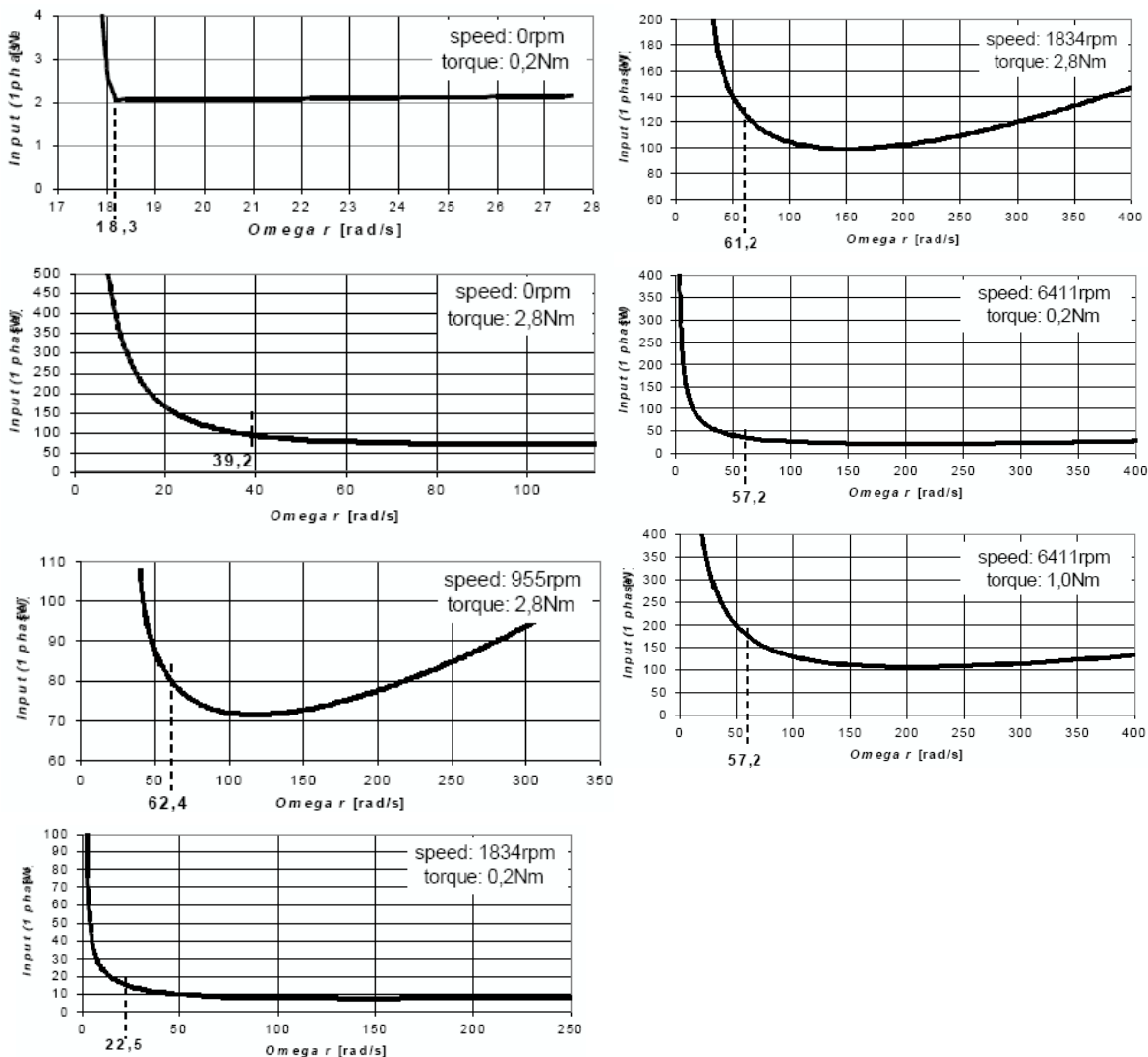
Tento motor byl experimentálně měřen. Parametrem měření byl zatěžovací moment a otáčky stroje. V daném pracovním bodě se měnilo napájecí napětí tzn. měnil se skluzový kmitočet, a měřil se příkon stroje. Získané výsledky můžeme vidět na následujících grafech 2.2.



Obr. 2.2: Závislost $\Omega_r = \Omega_r(T)$ měřených a vypočtených hodnot pro motor 1LA7063-4AB

Můžeme vidět, že naměřená křivka $\Omega_r = \Omega_r(T)$ (measured) kopíruje směr přímky získané výpočty. V některých částech jsou rozdíly značné, to je pravděpodobně způsobeno zjednodušováním v odvozování rovnic ale i dalšími faktory. Nejvýznamnější je faktor teploty a to hlavně v oblasti přetěžování stroje. Pro vysoké teploty se podstatně mění hodnoty odporu vinutí což znamená, že zadávané parametry R_1 a R (v tab. 2.2) jsou odlišné od skutečných. Však i přes tyto nedostatky přináší podobnost měřených a vypočtených hodnot hřejivě uspokojující pocit z dobře odvedené práce.

Parametry motoru byly vloženy do simulace v programu Matlab. Získáván byl příkon stroje v závislosti na Ω_r při parametrech momentu a otáček. Ve výsledných průbězích je zakreslen analyticky vypočítaný Ω_r .



Obr. 2.3: Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA7063-4AB

2.1.2 Motor 1LA5183-2AA

V porovnání s předchozím, je tento motor podstatně větší a většího výkonu. Základní katalogové parametry jsou v tabulce 2.3.

Počet pólových dvojic	1
Jmenovitý moment	71Nm
Jmenovité otáčky(při 50Hz)	2940min ⁻¹
Jmenovitý výkon	122kW
Účinnost při jmen. výkonu	91,7%

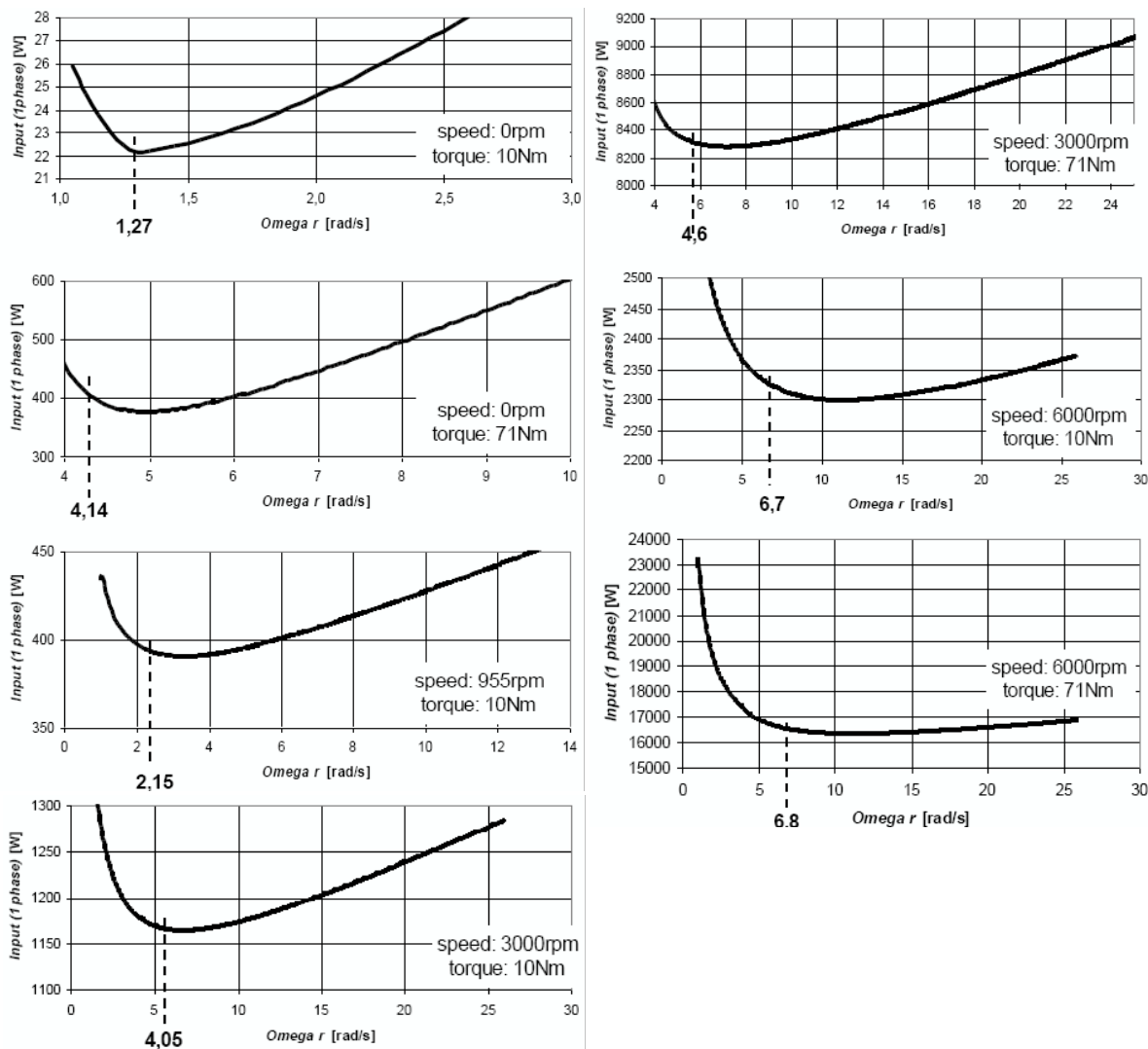
Tab. 2.3: Jmenovité hodnoty motoru 1LA5183-2AA

Parametry Γ -článku jsou počítány pro standardní vinutí (napájení 400V při 50Hz), viz. tabulka 2.4.

$R_1 = 176,4m\Omega$	$L_{1max} = 80mH$
$R = 131,5m\Omega$	$L_{1min} = 25mH$
$R_v = 236\Omega$	$A = 0,5729Vs/rad$
$R_{h0} = 236\Omega$	$B = 0,8910Vs/rad$
$\omega_0 = 314rad/s$	$L_\sigma = 2,97mH$

Tab. 2.4: Parametry motoru 1LA5183-2AA

Stejné porovnání výpočtů a simulace v MATLABu, jako pro předchozí motor, byly provedeny i pro tento motor. Výsledky jsou zobrazeny v následujících grafech 2.4.



Obr. 2.4: Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA5183-2AA

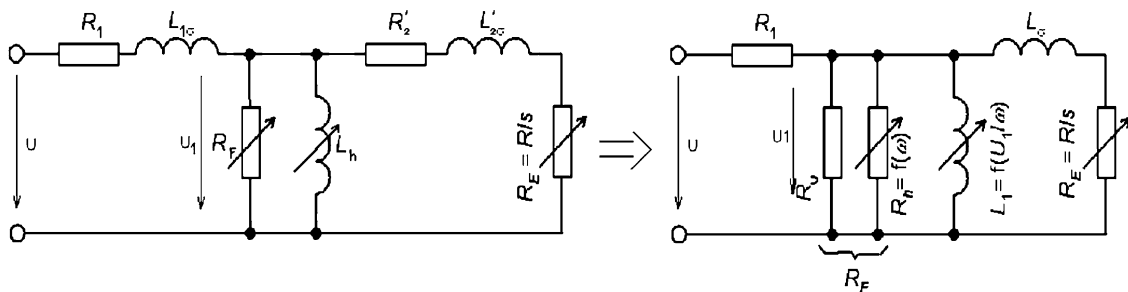
2.2 srovnání výpočtů se simulací v MATLABu

Výsledné průběhy jsou na obrázcích 2.3 a 2.4. Jak víme výstupem simulace je závislost příkonu motoru na skluzovém kmitočtu. Analyticky vypočítaný optimální Ω_r by tedy měl odpovídat lokálnímu minimu křivky pro daný pracovní bod. Při studiu přesnosti se dostaneme k závěru, že odvozené rovnice vždy udávají o něco menší výsledek než jaký by byl správný. To je pravděpodobně dáno nesčetnými zjednodušeními, kterých jsme se během odvozování dopustili. Z obrázků je patrné, že nejpřesnějších výsledků se nám dostává při malých otáčkách a malých momentech (téměř se shoduje se simulací). Ovšem při vzrůstajících momentech i otáčkách je vypočítaný kmitočet vždy o něco menší než kmitočet odpovídající minimu příkonu.

3 VÝPOČTY OPTIMÁLNÍHO SKLUZOVÉHO KMITOČTU PRO KONKRÉTNÍ MOTORY

3.1 Přepočet T-článku na Γ -článek

Všichni výrobci asynchronních motorů, ve svých katalozích, udávají hodnoty prvků pro T-článek. T-článek je nevhodný k řešení, protože je oproti Γ -článku všeobecně komplikovanější¹. Proto si nejprve katalogové hodnoty T-článku (R_1 , R'_2 , $X_{1\sigma}$, $X'_{2\sigma}$, X_h) přepočteme na hodnoty Γ -článku (R_1 , R , L_1 , L_σ).



Obr. 3.1: K přechodu mezi náhradními schématy

Použijeme k tomu následující vztahy vycházející z [3]:

$$L_{1\sigma} = \frac{X_{1\sigma}}{2\pi\omega_0} \quad ; \quad L_h = \frac{X_h}{2\pi\omega_0} \quad ; \quad L'_{2\sigma} = \frac{X'_{2\sigma}}{2\pi\omega_0} \quad (3.1)$$

$$L_1 = L_{1\sigma} + L_h \quad (3.2)$$

$$k = 1 - \frac{L_{1\sigma}}{L_1} \quad (3.3)$$

$$L_\sigma = L_1 \frac{1 - k^2}{k^2} \quad (3.4)$$

$$R = \frac{R'_2}{k^2} \quad (3.5)$$

kde:

- k je součinitel vazby
- ω_0 je úhlový kmitočet (zpravidla 50Hz)

¹ Γ -článek má o jednu proměnou méně než T-článek, viz. [3]

Odpor R_F reprezentující ztráty v železe statoru lze buď odhadnout nebo pro přesnější výsledky je vhodné ho určit měřením. Měření spočívá v měření motoru naprázdno, nejlépe při synchronních otáčkách při kterých budou ventilační ztráty nulové a výsledné ztráty naprázdno jsou přímo ztráty v železe ΔP_{Fe} . Potom platí:

$$R_{Fe} = \frac{U^2}{\Delta P_{Fe}} \quad (3.6)$$

R_{Fe} je paralelní kombinací R_v a R_{h0} jak ukazuje vztah (1.14). V praxi, pro jmenovitý kmitočet 50Hz, jsou tyto odpory zhruba stejné. Proto lze psát:

$$\frac{R_{Fe}}{2} \doteq R_v \doteq R_{h0} \quad (3.7)$$

Tímto máme vyřešené náhradní schéma Γ -článku asynchronního stroje. Ovšem ještě si musíme uvědomit, že R_h je závislý na kmitočtu napájení podle vztahu (1.11) (tj. pro nominální otáčky 50Hz platí $R_h = R_{h0}$) a L_1 je parametrická, viz. kapitola 1.3.1. Uvažovaná lineární aproximace se opírá o body A a B (obr.1.3) stanovené z výsledků měření. Měření je založeno na měření naprázdno (nejlépe při nulovém skluzovém kmitočtu). Měníme velikost napájecího napětí U a odečítáme proud jedné fáze statorového vinutí I . Za podmínky minimálního až nulového skluzového kmitočtu uplatníme vztah (1.16), který si připomeneme:

$$L_1 = \frac{U}{I\omega} \sqrt{\frac{1 - R_1^2 \left(\frac{I}{U}\right)^2}{1 - \frac{U^2}{R_F^2 I^2}}} \quad (3.8)$$

Dostaneme tak závislost zobrazenou na obr.1.3. Ve vynesené charakteristice jsou důležité body A a B , které lze vypočítat pomocí vztahů (1.18), které si rovněž připomeneme:

$$A = \frac{U_{1krit}}{\omega_0} = U_{krit} \frac{L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}}} \quad ; \quad B = \frac{U_{10}}{\omega_0} = U_0 \frac{L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}}} \quad (3.9)$$

kde U_{1krit} je napětí při kterém je magnetický obvod nasycen (L_1 přestává být konstantní) a U_{10} je napětí maximálního nasycení. Pomocí vypočtených bodů a změřené charakteristiky (obr.1.3) získáme aproximaci danou vztahem (1.19):

$$L_1 = L_{1max} - \frac{\Delta L_1}{B - A} \left(\frac{U_1}{\omega} - A \right) \quad (3.10)$$

3.2 Princip použití matematického aparátu

Řešení optimálního rotorového kmitočtu jsme celkem rozdělili na šest případů. Stanovit který vzorec použít není zrovna jednoduché, protože rozdělení podle otáček (extrémně malé otáčky, větší malé otáčky a velké otáčky) je přímo závislé na počítaném optimálním skluzovém kmitočtu. Rovněž momentové členění se zakládá na spočítání hranice, mezi malým a velkým momentem, pomocí optimálního skluzového kmitočtu. Pro ruční počítání to znamená nejprve se rozhodnout který případ je nejvhodnější pro zadané podmínky a po vypočtení optimálního rotorového kmitočtu zkontrolovat zda naše volba byla správná (spočítat hraniční nebo i maximální moment a hraniční otáčky).

Je bezpochyby lepší pro výpočet použít výpočetní techniku. Pro tyto účely byl vytvořen program `ideal_skluz.exe`, který byl pro tyto účely naprogramován v jazyce C. V programu si nadefinujeme celý motor pomocí Γ - článku a jeho provozních podmínek jako je zátěžný moment a požadované otáčky. Program řeší zadání pro všech šest případů zároveň. Vypočítá optimální rotorový kmitočet Ω_r pro každý případ, stejně tak spočte i hraniční a maximální momenty. Také podle vypočtených hodnot rozhodne, který řešící rozsah je správný nebo zda je zadání neřešitelné (při velkém přetížení na daných otáčkách). Program taky dopočte potřebné napájecí napětí podle vztahu (1.24).

Pro ukázkou zde provedeme výpočet dvou motorů. K řešení nám poslouží už výše zmiňovaný program. Motory budeme řešit pro různé otáčky a různé zatížení tak, abychom ukázali univerzálnost a rozsah použití optimalizace.

3.3 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA7 070-4AB

Jedná se o asynchronní motor s kotvou nakrátko od firmy Siemens. Statorové vinutí je spojeno do hvězdy a při jmenovitých hodnotách napájené fázovým napětím $U_f = 230V$ a proudem jedné fáze $I_f = 0,76A$. Je to čtyřpólový stroj, který při jmenovitých otáčkách $n = 1350min^{-1}$ dává jmenovitý moment $M = 1,8Nm$. Za těchto podmínek je účinnost $\eta = 60\%$, $\cos\varphi = 0,79$ a výkon 80W. Výrobce dále udává hodnoty pro náhradní T -článek motoru:

$$R_1 = 60,6\Omega ; R_2' = 33,75\Omega ; X_{1\sigma} = 54,7\Omega ; X_{2\sigma}' = 10,91\Omega ; X_h = 383,4\Omega$$

Nejprve si musíme vytvořit náhradní schéma as. motoru ve tvaru Γ -článku. Postup přepočtu je popsán v kapitole 3.1. Přepočtem jsme získali následující hodnoty:

$$\begin{aligned} R_1 &= 60,6\Omega ; R = 44,07\Omega ; L_1 = 1,3941H ; L_\sigma = 0,4262H ; \\ R_v &= R_{h0} = 1058\Omega ; L_{1max} = 2,0916H ; L_{1min} = 0,6977H ; \\ A &= 0,5704Vs/rad ; B = 0,859Vs/rad \end{aligned}$$

Nyní máme všechny vstupní konstanty naší optimalizace. Další potřebné vstupní hodnoty jsou dány pracovním bodem motoru, proměnnými otáčkami a momentem.

Motor budeme řešit už ve zmíněném programu `ideal_skluz.exe`, viz. obr.3.2. Můžeme vidět, jak výsledky všech skupin otáček o momentů, tak velikost korepondujícího napětí. Pro větší malé otáčky a velké otáčky při velkém momentu se optimální Ω_r počítá pomocí jednoduché iterační metody². Program vybere správné řešení podle tabulky 4.1 a dále dopočte korespondující napájecí napětí podle rovnice (1.24).

Výpočet optimálního rotorového kmitočtu

M: 1,8 Nm; omega_m: 1350 ot/min

Počítej

Parametry motoru:

Rv: 1058 Ohm; Rh0: 1058 Ohm; omega0: 314 rad/s; L1max: 2,0916 H; L1min: 0,6977 H; a: 0,5704 Vs/rad; b: 0,859 Vs/rad; Lsigma: 0,4262 H; R: 44,07 Ohm; R1: 60,6 Ohm; p: 2 pól dvojic

Malé otáčky		Větší otáčky		Velké otáčky	
Malý moment					
Omega_r	15,649 rad/s	Omega_r	22,840 rad/s	Omega_r	31,325 rad/s
M1	0,6784 Nm	M1	0,9693 Nm	M1	1,3339 Nm
Velký moment					
Omega_r	25,693 rad/s	Omega_r	38,265 rad/s	Omega_r	40,859 rad/s
M2	2,4292 Nm	M2	3,4142 Nm	M2	4,0732 Nm
		L1	0,7185 H	L1	2,0991 H
Správný výsledek:			Odpovídající napětí:		
Omega_r 38,265 rad/s			U 238,82 V		

Obr. 3.2: Výpočet pro motor 1LA7 070-4AB

²Algoritmus se založen na dosazení zadané L_1 do potřebných rovnic. Pokud se výsledek mezi volenou a vypočtenou hodnotou L_1 bude lišit o více než 0,1mH, tak se krok provádí znova pro větší hodnotu L_1 . Výpočet se ukončí při shodě volené a vypočtené L_1 o méně než 0,1mH nebo pokud se při dosazování dosáhne L_{1max} (v tom případě daný rozsah není vhodný pro řešení a není třeba správné iterace).

Motor byl vyřešen pro široký rozsah otáček a zatěžovacích momentů a výsledky řešení jsou zobrazeny v následující tabulce.

$n [min^{-1}]$	$M [Nm]$			
—	0,2	1	1,8	2
0	15,64	19,11	25,69	27,24
50	15,64	19,11	25,69	27,24
200	18,59	35,92	35,92	35,93
1000	21,26	36,86	36,86	36,86
1350	22,8	37,4	38,26	38,86
3000	32,08	32,08	41,58	41,83

Tab. 3.1: Optimální $\Omega_r [rad/s]$ pro různé otáčky a moment motoru 1LA7 070 -4AB

3.4 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA5 183-2AA

Opět máme asynchronní motor s kotvou nakrátko od firmy Siemens, ale tento motor je podstatně větší. Jeho jmenovitý výkon je 22kW, statorové vinutí je spojeno do hvězdy napájené fázovým napětím $U_f = 230V$ a proudem jedné fáze $I_f = 39A$. Jmenovité otáčky jsou $n = 2940min^{-1}$, jedná se tedy o dvojpólový stroj. Jmenovitý moment je $M = 71Nm$, účinnost $\eta = 91,7\%$, a účiník $\cos\varphi = 0,88$. Výrobce dále udává hodnoty pro náhradní T -článek motoru:

$$R_1 = 0,1764\Omega ; R_2' = 0,1246\Omega ; X_{1\sigma} = 0,45\Omega ; X_{2\sigma}' = 0,487\Omega ; X_h = 16,48\Omega$$

Opět si převedeme model T -článku na Γ -článek podle kapitoly 3.1, dostaneme tak:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,1764\Omega ; R = 0,1315\Omega ; L_1 = 53,9mH ; L_\sigma = 2,97mH ; \\ R_v &= R_{h0} = 236\Omega ; L_{1max} = 80mH ; L_{1min} = 25mH ; \\ A &= 0,5729Vs/rad ; B = 0,8910Vs/rad \end{aligned}$$

Jak už víme, nyní vše záleží na pracovním bodě motoru. Postup výpočtu je stejný jako u předešlého motoru. Zadané parametry a vypočtené hodnoty pro jmenovitý pracovní bod můžeme vidět na obrázku 3.3.

Výsledky výpočtu Ω_r pro různé otáčky a různé momenty jsou seřazeny v tabulce 3.2. Silně vyznačená hodnota ukazuje optimální skluzový kmitočet pro jmenovité hodnoty. Pro jmenovité hodnoty je výpočet zachycen na obrázku 3.3.

Výpočet optimálního rotorového kmitočtu

M Nm
omega_m ot/min

Počítej

Parametry motoru:
Rv Ohm
Rh0 Ohm
omega0 rad/s
L1max H
L1min H
a Vs/rad
b Vs/rad
Lsigma H
R Ohm
R1 Ohm
p pól.dvojic

Malé otáčky
Malý moment
Omega_r 1,2194 rad/s
M1 9,1031 Nm

Větší otáčky
Omega_r 4,0508 rad/s
M1 30,015 Nm
Omega_r 4,5995 rad/s
M2 82,240 Nm
L1 0,0361 H

Velké otáčky
Omega_r 4,0470 rad/s
M1 30,017 Nm
Omega_r 4,5819 rad/s
M2 82,250 Nm
L1 0,0363 H

Správný výsledek:
Omega_r 4,5819 rad/s

Odpovídající napětí:
U 264,26 V

Obr. 3.3: Výpočet pro motor 1LA5 183 - 2AA

$n [min^{-1}]$	$M [Nm]$			
—	5	10	30	71
0	1,22	1,27	2,27	4,14
50	1,27	1,37	2,33	4,14
200	1,43	1,43	2,26	4,2
1000	2,23	2,23	2,55	3,97
2940	4,1	4,1	4,1	4,56
6000	6,81	6,81	6,81	8,96

Tab. 3.2: Optimální $\Omega_r [rad/s]$ pro různé otáčky a moment motoru 1LA5 183-2AA

4 ZÁVĚR

Teoretické řešení uvedené v této práci přináší odpověď, jak vypočítat optimální rotorový kmitočet třífázového asynchronního stroje s kotvou nakrátko s požadavkem na minimální ztráty v ustáleném stavu. Vstupní proměnné jsou požadovaný mechanický moment, požadované otáčky a vlastnosti daného stroje, reprezentované náhradním schématem ve tvaru Γ -článku. Je jasné, že tuto optimalizaci nevyužijeme u strojů připojených na síť a pracujících při konstantních otáčkách a zatížení. Využijeme jí u trakčního řízení. Například u zařízení s akumulátorem, střídačem a asynchronním motorem je vhodné použít výsledné vztahy. Přínosem nám pak bude lepší účinnost a práceschopnost zařízení.

Výsledné vztahy pro výpočet optimálního rotorového kmitočtu jsou shrnuty v tabulce 4.1. Pro tento optimální Ω_r je vždy nutné dopočítat korespondující napájecí napětí, které lze uvažovat podle vztahu (1.24).

extrémně malé otáčky ($p\Omega_m \ll \Omega_r$)	větší malé otáčky ($\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$)	velké otáčky ($p\Omega_m \geq 20\Omega_r$)
malý moment ($M \leq M_1$)	malý moment ($M \leq M_1$)	malý moment ($M \leq M_2$)
Ω_r (1.40)	Ω_r (1.57)	Ω_r (1.63)
M_1 (1.43)	M_1 (1.43)	M_1 (1.65)
velký moment ($M > M_1$)	velký moment ($M > M_1$)	velký moment ($M > M_2$)
Ω_r (1.50)	Ω_r (1.58)	Ω_r (1.66)
	L_1 (1.60)	L_1 (1.69)

Tab. 4.1: Přehled výpočtu

Zhodnocení výpočtů zadaných motorů

V práci byly provedeny výpočty dvou typů asynchronních motorů. Při pohledu na výsledky výpočtů je vidět souhlasnost vypočtených optimálních rotorových kmitočtů s teoretickými předpoklady. Při malých otáčkách a malém momentu je dobré zmenšit skluzový kmitočet, větší sycení není vhodné ale díky malým otáčkám jsou ztráty v železe minimální, magnetizační proud nemá větší vliv na ztráty ve vinutí a ztráty v rotoru jsou menší díky malému Ω_r . Při větších momentech už je vhodnější zvětšit Ω_r , protože zvětšením skluzového kmitočtu a snížením sycení klesnou i ztráty v železe a ztráty ve vinutí statoru klesnou také, díky menšímu magnetizačnímu proudu. A při větších momentech nejsou ztráty v rotoru tak významné oproti ostatním.

Pro vysoké otáčky je rovněž vidět, že je lepší zvolit větší skluzový kmitočet aby sycení v motoru nebylo zbytečně vysoké. Menším sycením totiž zmenšíme dominantní ztráty v železe.

Ve výsledcích jsou uvedeny výsledky pro jmenovité hodnoty motorů. U malého motoru 1LA7 070-4AB vyšel optimální rotorový kmitočet $\Omega_r = 38,2 \text{ rad/s}$ tj. 6Hz. Skluzový kmitočet udávaný výrobcem je 5Hz (pro otáčky 1350 min^{-1} a moment 1,8Nm). Lze tedy říci, že tento motor pracuje při jmenovitých hodnotách v poměrně úsporném režimu. U motoru velkého výkonu 1LA7 070 -4AB výrobce udává jmenovitý rotorový kmitočet 1Hz (při otáčkách 2940 min^{-1} a momentu 71Nm). Vypočtený optimální rotorový kmitočet je 0,75Hz ($\Omega_r = 4,56 \text{ rad/s}$). Opět se jedná o přibližně stejné hodnoty, při kterých má motor dobrou účinnost.

LITERATURA

- [1] Vorel, P. *Maximum Efficiency of an Induction Machine Operating in Wide Range of Speed and Torque - Part 1 (Theoretical Analysis)*. připraveno k vydání v IEEE Transaction on Industry Applications.
- [2] Vorel, P., Huták, P. Procházka, P. *Maximum Efficiency of an Induction Machine Operating in Wide Range of Speed and Torque - Part 2 (Calculation, Simulation and Measurement Results)*. připraveno k vydání v IEEE Transaction on Industry Applications.
- [3] Patočka, M. *Střídavé stroje*. čtvrtá upravená školní verze, Skriptum FEKT VUT Brno, Brno 2008.